Repaso práctica

Cuando necesitamos determinar el valor de de verdad de una fórmula construida en una lógica de predicados tenemos que pararnos en una **interpretación**, es decir, no alcanza con darnos la fórmula simplemente, si no que nosotros tenemos que tener una interpretación, es decir, haciendo un abuso de las palabras, tenemos que identificar o interpretar cada uno  de los elementos de las fórmulas, por ejemplo, si tenemos **funciones**, tenemos que identificar qué significa la función, si tenemos **predicados**, tenemos que identificar qué significan cada uno de los predicados, si tenemos **constantes** debemos darle valores a las constantes.

Si tenemos que construir una interpretación, lo usamos para determinar el valor de verdad de una fórmula y una interpretación tiene varios elementos, no es ni más ni menos, que una función que nos da el significado para cada uno de los elementos con los que vamos a trabajar, un significado para el o los predicados que vamos a trabajar, para la función con la que vamos a trabajar, para las constantes si las hay y además esa interpretación define un universo de elementos, este universo de elementos es un conjunto o dominio de posibles valores sobre los cuales esas variables que vemos en los predicados van a tomar algún valor particular, y esos valores particulares se llaman valuaciones, es decir, cada vez que se asigne un valor a una variable dentro del dominio, es una valuación para esa variable.

Hamilton 3.3 y 3.4

**Satisfactible en una interpretación,  |=I,v A** Decimos que una fórmula es insatisfactible en una interpretación, si existe una valoración, para x, es decir un valor para x dentro del dominio donde se está trabajando, que hace a esa fórmula verdadera pero para esa valoración, es decir un valor de x para que en esa fórmula es verdadera.

**Una fórmula es verdadera en una interpretación |=I A**, esa fórmula tiene que satisfacerse para todos los posibles valores de x, dentro del universo o dominio.

**Logicamente válida |=A** cualquier interpretación, esa fórmula va a ser verdadera

**Contradictoria** en una interpretación si no es verdadera para cualquier valoración es insatisfactible, es falsa en cualquier interpretación.

**Ligadura de una variable**, está relacionado al rango de los cuantificadores que están en esa fórmula.

Una fórmula es cerrada si no tiene variables libres.

**i equivalencia**, lo utilizamos para determinar cuando una variable que está cuantificada universalmente o existencialmente es verdadera o no.

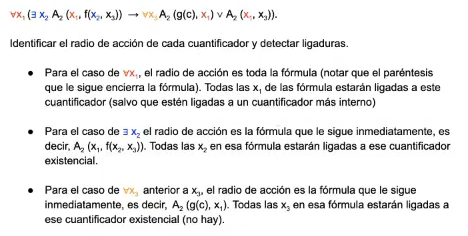
**Ejercicios**

**1. Señalar las ocurrencias libres o ligadas de x1 , x2 , x3 en la siguiente fbf escrita en un lenguaje de primer orden donde C = {c}, F = {f, g}, y P = {A21 }, con g de aridad 1; f de aridad 2, A21 de aridad 2**

**i- ∀x1 (∃x2 A21 (x1 , f (x2 , x3 )) → ∀x3 A21 (g(c), x1 ) ∨ A21 (x1 , x3 )).**

**ii- ∀x1 (∃x2 A21 (x1 , f (x2 , x3 ))) → ∀x3 A21 (g(c), x1 ) ∨ A21 (x1 , x3 ).**

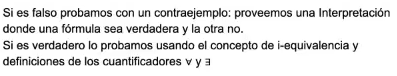
Debemos señalar cuáles de las variables están libre y cuales están ligadas, hay que prestar atención a los paréntesis, para ver el rango de acción de un cuantificador.



En el caso i no es una fórmula cerrada porque tenemos una variable libre, x3, que no está ligada a un cuantificador, en este caso x3 es una variable libre.

**2. Sean A y B fbfs escritas en un lenguaje de primer orden. Analizar si son o no lógicamente equivalentes los siguientes pares de fbfs (usar noción de i equivalencia o contraejemplos según corresponda):**

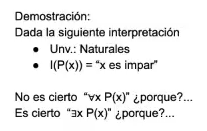
**i- (∀x)A ∃xA**



Es lo mismo decir que una propiedad vale para todos los elementos, que decir que vale para alguno de ellos? esto es lo que dice la opción i, no, no es lo mismo, porque en él existe dice que al menos uno cumple la propiedad.

Hay que dar una interpretación para probarlo.

https://lh6.googleusercontent.com/IbcuYov9KBBUY5AIT3WWhNMQXVRQ7F6jh45rt6t_YdlpyCmkavWLQT22tPH7_58VtSLWTT9bKekVLDUH_Nh5ulsu9rn0Vt4CGiZE_kI3H_lkGE06T_H1t_8y8mHuVCm7IXBXUW40

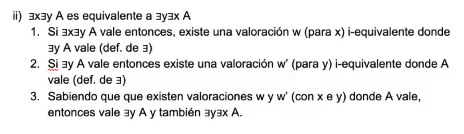


Para todos: no se cumple porque no todos los x en los números naturales no son impares. Falta

Existe: se cumple porque existe algún x en los números naturales que es impar. Verdadera

Encontramos una interpretación verdadera y otra falsa, por lo tanto las fórmulas no son lógicamente válidas.

**ii- ∃x∃yA ∃y∃xA**

****

En el punto 2, se tienen 2 valoraciones para 2 x e y distintos, donde esa fórmula se satisface, teniendo eso intento armar o aplicar las mismas definiciones para construir la fórmula al revés.

**iii- ∃x∀yA ∀y∃xA**

**iv- ∃x(A ∧ B) ∃xA ∧ ∃xB**

**v- ∃x(A ∨ B) ∃xA ∨ ∃xB**

**vi- ∀x(A ∨ B) ∀xA ∨ ∀xB**

Identificar si las fórmulas son lógicamente equivalentes o no lo son.

Si queremos probar que las fórmulas no son lógicamente equivalentes, hay que probar que puede darse un caso particular, un contra ejemplo, donde una de las fórmulas sea verdadera y la otra no lo sea, tenemos que proveer una interpretación donde una fórmula sea verdadera y la otra fórmula no lo sea.

**3. Sea un lenguaje de primer orden con las siguientes caracterı́sticas:**

**Conjunto de constantes: C = {c, u}.**

**Sin sı́mbolos de función: F = ∅.**

**Conjunto de sı́mbolos de predicado: P = {A21 }, con A21 de aridad 2, va a recibir 2 parámetros.**

**Sea I la siguiente interpretación para ese lenguaje sobre el dominio de los números Naturales:**

**. I(c) = 0**

**. I(u) = 1**

**. I(A21 (x, y)) = {(x, y) ∈ N × N ; x ≤ y} donde I es una función de interpretación semántica.**

**Verificar si las siguientes afirmaciones son o no correctas. Fundamentar las respuestas.**

**i- A21 (c, x) es satisfactible en I.**

**ii- A21 (u, x) es satisfactible en I.**

**iii- ∀xA21 (c, x) es satisfactible en I.**

**iv- ∀xA21 (u, x) es satisfactible en I.**

**v- A 21 (c, x) es verdadera en I.**

**vi- ∀xA21 (c, x) es lógicamente válida.**

**vii- A21 (u, c) ∧ ¬A 21 (u, c) es contradictoria,** no tenemos variables, sólo constantes, necesariamente si A es verdadera, necesariamente ¬A va a ser falsa, se deduce por el concepto de valuación, como hay una conjunción(∧) es muy difícil que llegue a ser siempre verdadero, por lo tanto es contradictoria.

En el caso ii le damos un valor a x que satisfaga la fórmula, es decir que x sea mayor o igual a 1, porque u tiene el valor 1. En este caso la fórmula es factible en esa interpretación, lo justificamos dándole un valor a x por ejemplo 1 o 2.

En los casos en que la fórmula tenga un para todos, la fórmula tiene que valer para cualquier valor de x, en este caso no se puede decir 1 o 2, porque no se cubren todos los valores. Caso iv es satisfactible.

Para probar lógicamente  válida, si encuentro una interpretación que no es válida no es lógicamente válida, pero encontrar un solo ejemplo que sea válida no me garantiza que todos los sean.

**4. Ofrecer una interpretación para los siguientes lenguajes de primer orden donde las fórmulas sean verdaderas y otra donde sean falsas. Traducir en cada caso las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural.**

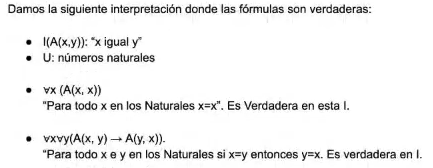
**i- C = F = ∅, P = {A21 }, con A21 de aridad 2.**

* **∀x∀y(A21 (x, y) → A21 (y, x)).**
* **∀x(A21 (x, x)).**
* **∀x∀y∀z((A21 (x, y) ∧ A21 (y, z)) → A21 (x, z)).**

**ii- C = {c}, F = {f }, P = {A21 }, con f y A21 de aridad 2.**

* **∀x(A21 (x, c) → A21 (x, f (y))).**
* **∀x(¬A21 (x, x)).**
* **¬∀x∀y(A21 (x, y)).**

Tenemos que proveer interpretaciones verdaderas y falsas



**5. Determinar si las siguientes fbfs escritas en algún lenguaje de primer orden son contradictorias, satisfactibles en alguna interpretación, verdaderas en alguna interpretación o lógicamente válidas. Fundamentar.**

**i- (∃x)(¬A(x)) ∨ (∀x)(A(x) ∨ B(x)).**

**ii- ∃y∃x P (x, y) → ∃x∃y P (x, y).**

Proveer interpretaciones, si es contradictoria no va a ser satisfactible en ninguna interpretación, intentamos probar si es lógicamente válida, y vamos bajando en niveles.

**6. i- Si la fbf A(x) es satisfactible, ¿entonces la fbf ∃xA(x) es lógicamente válida?.Fundamentar.**

**ii- La fbf abierta ∀y P (x, y) → ∀y∀x P (x, y) ¿es lógicamente válida?. Fundamentar.**

**iii- Sea un lenguaje de primer orden con la letra de constante c y las letras de predicado P y Q, ambas de aridad 1. Sea la fbf : (P (c) ∨ ∀x(P (x) → Q(x))) → Q(c) ¿Es lógicamente válida? Fundamentar.**

**iv Sean A y B dos fbf escritas en un lenguaje de primer orden. La fbf:**

**∀x(A(x) ∨ B(x)) → ((∀xA(x)) ∨ (∀xB(x))) es lógicamente válida? Fundamentar.**

Si respondemos que no hay que buscar un contra ejemplo, si respondemos que si tratamos de usar el concepto de valuación o de i-equivalencia si fuera necesario.

**7. Sea A una fbf de un lenguaje de primer orden, I una interpretación para tal lenguaje. Demostrar que A es verdadera en I si y sólo si ¬A es falsa en I.**

https://lh6.googleusercontent.com/rqconV5UN6Kfa3W2Q390RxVeb1jBeLrKpjAD4C_BtC3WgfsUGwq6TwZA8u2q6DipL0_M8o5Y-cNuJDrJlPfA5ifsvRGZrRI59hzmBtLteYE8lmMUb8dWTC0TU7sgw1jvNLCRImE4

**8. Sea A una fbf que no contiene cuantificadores (es decir, abierta) escrita en algún lenguaje de primer orden. Sea I una interpretación para tal lenguaje.**

**¿Es posible decidir acerca del valor de verdad de A en I? Fundamentar.**

Últimas diapositivas de la última teoría.

Si en estructura una fórmula proviene de tautología, se ve como tautología en L, en lógica de predicados va a ser lógicamente válida.

**https://lh6.googleusercontent.com/i7oUZMmGkdEgP_iAruhQGlcAlbXAxB-RrRynacweNOENXY_ad9NZiI_0hXeByAlLdLP41y65yFsqDf7EbOKomVaoFMI8zZFwa1rkrjmonbdvjRAV37CxJ8Ki2bnDmYw_AmoSoTod**

La variable x no está ligada a ningún cuantificador sin embargo para cualquier interpretación esa fórmula va a ser verdadera, porque esté parado en la interpretación donde este parado esa si el antecedente es verdadera el consecuente necesariamente también lo va a ser.